

# Kvantemekanik

## *postulater, notation, polarisationstilstande, entanglement, Bells ulighed, ...*

Ulrich B. Hoff\*

DTU Fysik, Danmarks Tekniske Universitet, Fysikvej bld. 309, 2800 Kgs. Lyngby, Denmark

(Dated: 11. februar 2018)

I denne note introduceres de grundlæggende kvantemekaniske postulater, herunder *bra-ket* notationen til beskrivelse af et systems kvantetilstand og fortolkningen af tilstandsvektoren i termer af sandsynlighedsamplituder for målingsresultater. Herefter fokuseres der på beskrivelsen af polarisationstilstande for lys og målinger af polarisation, relevant for eksperimenterne i QuantumLab på DTU Fysik. Endelig diskuteres begrebet *entanglement* og Bells ulighed.

### KVANTEMEKANIKKENS POSTULATER

Grundlaget for kvantemekanikken formuleres ofte i form af et antal postulater (ubeviste påstande). Antallet af postulater varierer fra den ene tekstbog til den anden, men her tager vi udgangspunkt i noten “Supplementary notes on Dirac notation, Quantum states, etc.” af R. L. Jaffe.

#### 1. postulat (tilstandsrum og tilstandsvektor)

I kvantemekanikken benyttes en særlig type vektorrum kaldet *tilstandsrummet* (*Hilbert rum*,  $\mathcal{H}$ ) til at beskrive fysiske systemer, og tilstanden af det fysiske system er givet ved en *tilstandsvektor*,  $|\psi\rangle$ , i vektorrummet. En sådan vektor kaldes også en *ket*. Ligesom det 3-dimensionelle rum er udspændt af basisvektorerne  $\mathbf{e}_x = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{e}_y = (0, 1, 0)$  og  $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$ , så er tilstandsrummet for et system også udspændt af et antal basisvektorer,  $|\phi_1\rangle$ ,  $|\phi_2\rangle$ , ...,  $|\phi_n\rangle$ , hvor antallet  $n$  af basisvektorer afhænger af systemets *dimension*. I den gren af kvanteoptikken der omhandler *kontinuerte variable* er tilstandsrummet uendelig-dimensionelt mens en foton's polarisationstilstand (relevant for eksperimenterne i QuantumLab) kan beskrives i et tilstandsrum med bare 2 dimensioner.

Enhver vektor i tilstandsrummet er en mulig tilstand for systemet, dvs. at systemet også kan være i en *superpositionstilstand*

$$|\psi\rangle = a_1|\phi_1\rangle + a_2|\phi_2\rangle, \quad (1)$$

hvor  $a_1$  og  $a_2$  er to *komplekse tal*. Det er vigtigt at forstå, at superpositionstilstande ikke bare handler om at vi ikke ved præcist hvad systemets tilstand er, men at det faktisk er i en *samtidig* blanding af to forskellige tilstande. Det kan f.eks være to forskellige positioner i rummet, to forskellige hastigheder, to forskellige polarisationer, ...

I tilstandsrummet findes også et indre produkt  $\langle\phi|\psi\rangle$ , som giver et mål for overlappet imellem to tilstandsvektorer. Det er helt ligesom det indre produkt vi kender fra rumgeometrien,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ . En vektor på formen  $\langle\phi|$  kaldes en *bra*. Tilsammen bliver det indre produkt

så  $\langle\phi|\psi\rangle = \text{bra(c)ket}$ . For basisvektorerne i tilstandsrummet gælder, at de allesammen er vinkelrette på hinanden og hver har længden 1 (ortonormale), dvs.  $\langle\phi_1|\phi_2\rangle = \langle\phi_2|\phi_3\rangle = \dots = 0$  og  $\langle\phi_1|\phi_1\rangle = \langle\phi_2|\phi_2\rangle = \dots = 1$ . Det er præcis det samme som for basisvektorerne  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  og  $\mathbf{e}_3$  for det 3-dimensionale rum.

Tilstandsvektoren for et system skal altid være *normaliseret*, dvs. havdelængden 1. For superpositionstilstanden i (1) får vi:

$$\langle\psi|\psi\rangle = (a_1^*\langle\phi_1| + a_2^*\langle\phi_2|)(a_1|\phi_1\rangle + a_2|\phi_2\rangle) \quad (2)$$

$$= |a_1|^2 + |a_2|^2 \quad (3)$$

$$= 1. \quad (4)$$

Det betyder altså, at summen af absolut kvadraterne på koefficienterne altid skal være én. I udregningen brugt vi, at

$$\langle\phi_1|\phi_2\rangle = \langle\phi_2|\phi_1\rangle = 0 \quad (5)$$

$$\langle\phi_1|\phi_1\rangle = \langle\phi_2|\phi_2\rangle = 1. \quad (6)$$

#### 2. postulat (observable)

Enhver observerbar egenskab ved et fysisk system er beskrevet ved en *operator* der virker på de tilstandsvektorer der beskriver systemet. Operatorer skrives som  $\hat{A}$ , og det at en operator virker på en tilstand skrives ved at gange den på tilstandsvektoren fra venstre,

$$\hat{A}|\psi\rangle. \quad (7)$$

Operatorens virkning er generelt at ændre tilstandsvektoren, dvs. operatoren laver en afbildning af  $|\psi\rangle$  over på  $|\psi'\rangle$ :

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = \hat{A}|\psi\rangle. \quad (8)$$

For enhver operator findes der et specielt sæt af tilstandsvektorer som ikke ændres af dens virkning, dvs.  $\hat{A}|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$ . Disse vektorer kaldes for operatorens *egenvektorer* og tallene  $a_i$  er de tilhørende *egenverdier*.

### 3. postulat (egentilstande)

For enhver observerbar størrelse  $A$  ved et fysisk system gælder, at de mulige udfald/resultater af en måling af denne størrelse netop er egenverdierne  $a_i$  for den tilsvarende operator  $\hat{A}$ . Operatoren der repræsenterer fysiske størrelser er *hermitiske* og har den egenskab at deres egenverdier alle er *reelle tal*. Hermitiske operators egenvektorer er alle ortonormale og udspænder hele tilstandsrummet. At egenvektorerne er ortonormale kan skrives som:

$$\langle a_i | a_j \rangle = \delta_{ij}, \quad (9)$$

hvor symbolet  $\delta_{ij}$  kaldes et *Kronecker-delta*. Det har den egenskab, at

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ hvis } i = j \\ 0 & , \text{ hvis } i \neq j \end{cases} \quad (10)$$

### 4. postulat (sandsynlighedsamplitude)

Hvis et system er i en vilkårlig tilstand  $|\psi\rangle$  og der foretages en måling af den observerbare størrelse repræsenteret ved operatoren  $\hat{A}$ , så er *sandsynligheden* for at måleresultatet bliver egenverdien  $a_n$  givet ved kvadratet på det indre produkt mellem tilstanden  $|\psi\rangle$  og egenvektoren  $|a_n\rangle$ . Dvs.

$$P(a_n) = |\langle a_n | \psi \rangle|^2 \quad (11)$$

Det komplekse tal  $\langle a_n | \psi \rangle$  er *sandsynlighedsamplituden* for at måle  $a_n$  i tilstanden  $|\psi\rangle$ .

Da egenvektorerne for operatoren  $\hat{A}$  udspænder hele tilstandsrummet, kan vi skrive enhver tilstand  $|\psi\rangle$  som en superposition (i lineære algebra kaldes det en *linearkombination*) af egenvektorerne:

$$|\psi\rangle = \sum_j c_j |a_j\rangle = c_1 |a_1\rangle + c_2 |a_2\rangle + c_3 |a_3\rangle + \dots \quad (12)$$

Hvis vi bruger dette udtryk for tilstanden i udregningen af sandsynlighedsamplituden får vi, at

$$\langle a_n | \psi \rangle = \sum_j c_j \langle a_n | a_j \rangle = \sum_j c_j \delta_{nj} = c_n. \quad (13)$$

Når vi skriver en tilstand som en superposition af egentilstandene for en operator kan vi altså se, at coefficienterne netop er lig med sandsynlighedsamplituderne for at måle den egenverdi der hører til hver enkelt egenvektor:

$$|\psi\rangle = \sum_j \langle a_j | \psi \rangle \cdot |a_j\rangle. \quad (14)$$

Fra udtrykket i (12) og det at alle egenvektorerne er ortonormale, kan man desuden vise, at summen af sandsynlighederne for alle måleresultaterne er lig med én,

$$\sum_n |\langle a_n | \psi \rangle|^2 = \sum_n |c_n|^2 = 1. \quad (15)$$

Hvis det fysiske system er i en vilkårlig tilstand  $|\psi\rangle$  er middelværdien af en observerbar størrelse givet ved

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle. \quad (16)$$

Udnytter vi igen, at tilstandsvektoren kan skrives som en superposition af egenvektorer for  $\hat{A}$  og at egenvektorerne alle er ortonormale man kan vise, at operatorens middelværdi er givet ved

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \sum_n a_n |c_n|^2 = \sum_n a_n \cdot P(a_n). \quad (17)$$

Det er præcis det samme resultat som man ville forvente fra sædvanlig sandsynlighedsregning: middelværdien er lig med summen af de mulige resultater, hver gang med sandsynligheden for at resultatet forekommer. Slår man f.eks med en terning, så er de mulige udfald  $\{a_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  og hvert udfald forekommer med samme sandsynlighed, nemlig  $P_n = 1/6$ . Kaster man terningen mange gange, vil middelværdien af udfaldene være

$$\mathcal{M} = \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = 3,5. \quad (18)$$

### 5. postulat (kollaps)

Udfører man en måling af den observerbare størrelse  $A$  med resultatet  $a_n$ , så vil systemet umiddelbart efter målingen være i den tilhørende egentilstand  $|a_n\rangle$ . Målingen siges at *kollapse* systemets tilstand ned på egentilstanden  $|a_n\rangle$ . Er tilstanden før målingen givet ved en generel superpositionstilstand  $|\psi\rangle$ , vil målingen kollapse tilstanden ned i én af egentilstandene  $|a_n\rangle$  med sandsynligheden  $P(a_n) = |\langle a_n | \psi \rangle|^2$ . Udføres samme måling igen, vil den *med sikkerhed* give samme resultat, da systemet nu er i en egentilstand for operatoren  $\hat{A}$ .

### 6. postulat (tidsudvikling)

Når et fysisk system udvikler sig i tid bevares tilstandens normalisering. Tidsudviklingen beskrives matematisk ved en såkaldt *unitær operator*,  $\hat{U}(t, t_0)$  der bringer systemet fra starttilstanden  $|\psi(t_0)\rangle$  til slutttilstanden  $|\psi(t)\rangle$ . Dette skrives som:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle. \quad (19)$$

Der gælder desuden, at systemets tilstand til et hvert tidspunkt adlyder differentialligningen

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle, \quad (20)$$

hvor  $i = \sqrt{-1}$  er den imaginære enhed,  $\hbar$  er den reducerede Plancks konstant ( $\hbar = h/2\pi$ ) og  $\hat{H}$  er *Hamilton operatoren* der beskriver systemets totale energi.

## POLARISATIONSTILSTANDE FOR FOTONER

I eksperimenterne i QuantumLab er det polarisationstilstandene for enkelte fotoner og entangledede fotonpar der arbejdes med. Vi vil nu se på, hvordan nogle af de kvantemekaniske postulater ovenfor skal anvendes i denne sammenhæng.

Lysets (og elektromagnetisk stråling generelt) polarisation beskriver retningen af det elektriske felts svingninger vinkelret på lysets udbredelsesretning.

### Polarisationsbasis

Når vi betragter de kvantemekaniske tilstande for en fotonens polarisation, så er tilstandsrummet to-dimensionelt og udspændes af basisvektorerne

$$|H\rangle \text{ og } |V\rangle, \quad (21)$$

svarende til hhv. *horisontal/vandret* og *vertikal/lodret* polarisation. De svarer til basisvektorerne i plangeometrien:

$$|H\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |V\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

Ifølge 1. postulat kan en fotonens polarisationstilstand helt generelt skrives som en superposition af de to basisvektorer. Hvis vi udnytter at de trigonometriske funktioner  $\cos \theta$  og  $\sin \theta$  netop opfylder normaliseringsbetingelsen i (4),  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ , så ser vi, at den generelle superpositionstilstand kan udtrykkes som

$$|\psi\rangle = \cos \theta |H\rangle + \sin \theta |V\rangle. \quad (23)$$

Vinklen  $\theta$  betegnes ofte som *blandingsvinklen* da den bestemmer "blandingsforholdet" mellem horisontal og vertikal polarisation.

$H$ - $V$  basen er ikke den eneste basis der kan bruges til at beskrive fotonens polarisation; faktisk kan ethvert sæt bestående af to vinkelrette og normaliserede vektorer i planen benyttes, dvs. alle vektorpar der er en simpel rotation af  $H$ - $V$  basisvektorerne med en vinkel på  $\alpha$ :

$$|H_\alpha\rangle = R(\alpha)|H\rangle = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$$|V_\alpha\rangle = R(\alpha)|V\rangle = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Her er  $R(\alpha)$  *rotationsmatricen* givet ved

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Sættet af basisvektorer der er roteret  $\pm 45^\circ$  i forhold til

$|H\rangle$  beteges ofte som  $|\pm\rangle$  og er givet ved

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - |V\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Af (27) og (28) kan vi desuden se, at  $H$ - $V$  basisvektorerne kan udtrykkes vha.  $|\pm\rangle$  tilstandene som

$$|H\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) \quad (29)$$

$$|V\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle). \quad (30)$$

### Målinger

Givet en polarisationstilstand som i (23) kan vi finde sandsynligheden for at måle fotonens polarisation til at være  $V$  ved at beregne tilstandens projektion ind på  $|V\rangle$ :

$$P_V = |\langle V|\psi\rangle|^2 = \sin^2 \theta. \quad (31)$$

Tilsvarende er sandsynligheden for at måle fotonens polarisation til at være  $H$  givet ved

$$P_H = |\langle H|\psi\rangle|^2 = \cos^2 \theta. \quad (32)$$

Betragter vi i stedet en horisontalt polariseret foton, hvis tilstand er  $|H\rangle$ , og måler på den i  $\pm$ -basen, dvs. måler om dens polarisationstilstand er  $|+\rangle$  eller  $|-\rangle$ , så er sandsynlighederne for de to mulige udfald,

$$P_+ = |\langle +|H\rangle|^2 \quad (33)$$

$$= \left| \langle + | (|+\rangle + |-\rangle) / \sqrt{2} \right|^2 \quad (34)$$

$$= \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \quad (35)$$

$$= \frac{1}{2}, \quad (36)$$

$$P_- = |\langle -|H\rangle|^2 \quad (37)$$

$$= \left| \langle - | (|+\rangle + |-\rangle) / \sqrt{2} \right|^2 \quad (38)$$

$$= \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \quad (39)$$

$$= \frac{1}{2}. \quad (40)$$

Der er altså 50% sandsynlighed både for at måle fotonens polarisation til at være horisontal og vertikal.

I QuantumLabs eksperimenter måles fotonernes polarisation ved at sende dem igennem en *polarisator* – et optisk element der udvælger den polarisationsretning der

danner en vinkel  $\alpha$  med vandret, og lader den og kun den polarisation passere igennem. Jf. det 5. postulat er tilstanden for en foton der passerer igennem polarisatoren efterfølgende givet ved  $|H_\alpha\rangle = \cos\alpha|H\rangle + \sin\alpha|V\rangle$ , uafhængig af hvad tilstanden var forinden. Fotonen kobles derefter ind i en optisk fiber og sendes til en enkeltfotondetektor, hvor den med en sandsynlighed  $\eta_{det}$  giver anledning til en *detektions-event* – et “klik”. Sandsynligheden  $\eta_{det}$  betegner detektorens *kvanteeffektivitet*, dvs. den effektivitet hvormed et enkelt optisk kvant omdannes til en elektrisk impuls.

## ENTANGLEMENT

I det følgende introduceres det kvantefysiske begreb *entanglement*. Resultatet kendt som *Bells ulighed*, der gør det muligt at sammenholde kvantekorrelationerne i en entanglement tilstand med klassiske korrelationer, diskuteres og den teoretiske udledning af uligheden skitseres.

### Fotonpar

Hvis vi i stedet for en enkelt foton betragter et fotonpar, hvor hver foton hører til i forskellige rumlige *modes*, hhv. mode “1” og “2”, så beskrives den samlede tilstand for parret ved en tilstandsvektor i et Hilbert rum med dimension 4,  $\mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ . Her er “ $\otimes$ ” symbolet for den matematiske operation der hedder det *ydre produkt*, som kombinerer to vektorrum. Hvis fotonerne er ukorrelerede og begge horisontalt eller vertikalt polariserede, så er den samlede tilstand hhv.  $|H\rangle_1|H\rangle_2$  eller  $|V\rangle_1|V\rangle_2$ . I sådanne tilfælde siges tilstanden at være *separabel* da den kan skrives som et produkt af en tilstand for fotonen i den ene mode “gange” en tilstand for fotonen i den anden mode. Det er dog ikke altid muligt at separere fotontilstandene på den måde, f.eks er den tilstand der genereres af fotonkilden i QuantumLabs eksperimenter generelt givet ved

$$|\psi\rangle = \cos\theta|H\rangle_1|H\rangle_2 + e^{i\phi}\sin\theta|V\rangle_1|V\rangle_2. \quad (41)$$

Hvis tilstanden ikke kan skrives som et produkt af tilstande for hver af de to modes, så er fotonerne korrelerede – der er en grad af *entanglement* i tilstanden. Specielt findes der en basis for to-foton tilstandsrummet bestående

af *maksimalt entangledede* tilstande, givet ved

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_1|H\rangle_2 + |V\rangle_1|V\rangle_2), \quad (42)$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_1|H\rangle_2 - |V\rangle_1|V\rangle_2), \quad (43)$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_1|V\rangle_2 + |V\rangle_1|H\rangle_2), \quad (44)$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_1|V\rangle_2 - |V\rangle_1|H\rangle_2). \quad (45)$$

Dette sæt af tilstande er kendt som *Bell tilstandene* og har den egenskab, at de hver giver den størst mulige overskridelse af Bells ulighed.

## Korrelationsfunktion

I QuantumLabs eksperimenter undersøges tilstedeværelsen af entanglement gennem en analyse af korrelationerne mellem fotonpars polarisationer. Konkret undersøges fotonernes polarisation ved hjælp af polarisatorer der i hver mode udvælger en bestemt polarisationsretning, hhv.  $\alpha$  og  $\beta$ , som fotonen måles i. Efterfølgende registreres det vha. enkeltfotondetektorer om en foton blev transmitteret eller ej i den valgte polarisationsretning. Resultatet af målingen af fotonen i mode 1 betegnes  $A = A(\alpha) = \pm 1$ , hvor +1 betyder at fotonen blev detekteret i tilstanden

$$|H_\alpha\rangle = \cos\alpha|H\rangle + \sin\alpha|V\rangle, \quad (46)$$

og -1 at fotonen blev detekteret i

$$|V_\alpha\rangle = \cos\alpha|V\rangle - \sin\alpha|H\rangle. \quad (47)$$

På tilsvarende vis betegnes udfaldet af målingen i mode 2 som  $B = B(\beta) = \pm 1$ . (I eksperimentet er det kun de fotoner der af polarisatorerne projiceres ind på tilstandene  $|H_{\alpha(\beta)}\rangle$  som transmitteres og dermed detekteres).

Hvis målingen med polarisatorindstillingerne  $\alpha$  og  $\beta$  gentages på en mængde af identiske fotonpar – et *ensemble* af målinger – så kan man ud fra sættet af udfald bestemme korrelationen mellem målingsresultaterne. Kvantemekanisk set er denne *korrelationsfunktion* givet ved

$$E(\alpha, \beta) = \langle A(\alpha)B(\beta) \rangle, \quad (48)$$

hvor  $\langle \cdot \rangle$  betegner middelværdien beregnet over ensemblet af gentagelser. De mulige målingsresultater og bidrag til korrelationsfunktionen er opsummeret i Tabel I, og da middelværdien er givet ved summen af de enkelte bidrag, hver vægtet med den tilhørende sandsynlighed (jf. tidligere i denne note), er korrelationsfunktionen givet ved

$$E(\alpha, \beta) = P_{HH}(\alpha, \beta) + P_{VV}(\alpha, \beta) - P_{HV}(\alpha, \beta) - P_{VH}(\alpha, \beta). \quad (49)$$

Målt tilstand	$A(\alpha)$	$B(\beta)$	$A(\alpha)B(\beta)$
$ H\rangle_\alpha H\rangle_\beta$	1	1	1
$ H\rangle_\alpha V\rangle_\beta$	1	-1	-1
$ V\rangle_\alpha H\rangle_\beta$	-1	1	-1
$ V\rangle_\alpha V\rangle_\beta$	-1	-1	1

Tabel I.

Koincidenssandsynlighederne, f. eks  $P_{HV}(\alpha, \beta)$ , betegner sandsynligheden for samtidig detektion af en foton i mode 1 i  $|H_\alpha\rangle$  og en foton i mode 2 i  $|V_\beta\rangle$ . Teoretisk kan koincidenssandsynlighederne beregnes ud fra tilstandsvektoren for det genererede fotonpar. Eksempelvis genereres der i eksperimenterne i QuantumLab fotonpar i den entangled tilstand  $|\Phi^+\rangle$  og koincidenssandsynligheden  $P_{HV}(\alpha, \beta)$  er givet ved absolutkvadratet af projektionen af denne tilstand ind på detektionstilstanden  $|H_\alpha\rangle|V_\beta\rangle$ , dvs.:

$$P_{HV}(\alpha, \beta) = |\langle H_\alpha | \langle V_\beta | \Phi^+ \rangle|^2 \quad (50)$$

$$= \frac{1}{2} |\langle H_\alpha | H \rangle \langle V_\beta | H \rangle + \langle H_\alpha | V \rangle \langle V_\beta | V \rangle|^2 \quad (51)$$

$$\dots \quad (52)$$

$$= \frac{1}{2} \sin^2(\alpha - \beta). \quad (53)$$

De tre øvrige koincidenssandsynligheder er givet ved:

$$P_{HH}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \cos^2(\alpha - \beta), \quad (54)$$

$$P_{VH}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \sin^2(\alpha - \beta), \quad (55)$$

$$P_{VV}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \cos^2(\alpha - \beta). \quad (56)$$

Eksperimentelt bestemmes sandsynlighederne ud fra koincidensstatistikken, dvs. antallet af samtidige detektioner  $N$  i de to modes i løbet af det tidsinterval  $T$  der integreres over, målt for hver af de fire polarisationskombinationer der indgår i (49). Det er vigtigt at huske, at det kun er fotoner i tilstandene  $|H_{\alpha(\beta)}\rangle$  der detekteres og for at måle sandsynlighederne for  $V$ -tilstande stilles polarisatorerne derfor til de ortogonale vinkler i forhold til  $\alpha$  og  $\beta$ . For at omforme det målte antal af samtidige fotoner til en sandsynlighed skal det desuden normaliseres til det samlede antal samtidige detektioner  $N_{tot}$  for alle fire konfigurationer. De fire målte koincidenssandsynligheder er således givet ved

$$P_{HH}(\alpha, \beta) = \frac{N(\alpha, \beta)}{N_{tot}}, \quad (57)$$

$$P_{HV}(\alpha, \beta) = \frac{N(\alpha, \beta^\perp)}{N_{tot}}, \quad (58)$$

$$P_{VH}(\alpha, \beta) = \frac{N(\alpha^\perp, \beta)}{N_{tot}}, \quad (59)$$

$$P_{VV}(\alpha, \beta) = \frac{N(\alpha^\perp, \beta^\perp)}{N_{tot}}, \quad (60)$$

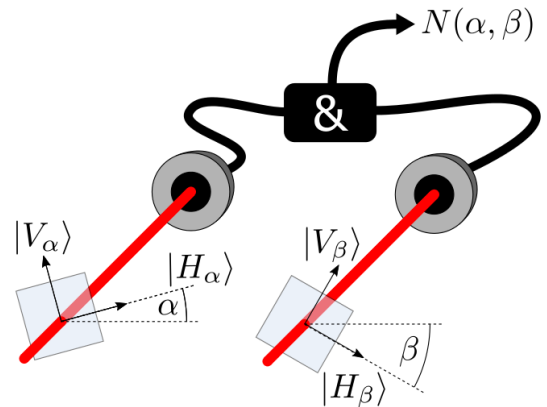
hvor

$$N_{tot} = N(\alpha, \beta) + N(\alpha, \beta^\perp) + N(\alpha^\perp, \beta) + N(\alpha^\perp, \beta^\perp). \quad (61)$$

Vi kan nu skrive korrelationsfunktionen (49) i termer af eksperimentelt målte størrelser som:

$$E(\alpha, \beta) = \frac{N(\alpha, \beta) + N(\alpha^\perp, \beta^\perp) - N(\alpha, \beta^\perp) - N(\alpha^\perp, \beta)}{N(\alpha, \beta) + N(\alpha^\perp, \beta^\perp) + N(\alpha, \beta^\perp) + N(\alpha^\perp, \beta)}. \quad (62)$$

Eksperimentelt måler man korrelationerne imellem to fotoners polarisation med en opstilling som illustreret i figur 1. Et stort antal af identiske fotonpar (et ensemble af fotonpar der alle er frembragt i den samme kvantetilstand) frembringes og sendes et efter igennem et par af polarisationsfiltre hvorefter de detekteres med fotodetektorer. Polarisationstiltrene lader kun fotoner med polarisation langs med de roterede horisontale retninger  $H_\alpha$  og  $H_\beta$  passere igennem og foretager derved en projektion af fotonernes tilstand ind på de to retninger. Sandsynlighederne for at fotonerne passerer igennem filtrene er givet ved (32). Når en fotoner rammer de to detektorer omdannes de til elektriske pulser af elektroner som efterfølgende registreres og processeres af en computer. Ved at tjekke om to elektriske pulser (en fra hver detektor) begge ankommer inden for et snævert tidsinterval kaldet koincidensvinduet, kan man tælle antallet af fotonpar,  $N(\alpha, \beta)$ , for de givne polarisatorindstillinger. I eksperimenterne i QuantumLab er koincidensvinduet  $\tau = 25$  ns og man tæller typisk fotonpar over en integrationstid på  $T = 1$  s.



Figur 1. Måling af korrelationer mellem to fotoners polarisation. Antallet af fotoner der samtidig rammer detektorerne registreres for en række af polarisatorindstillinger,  $\alpha$  og  $\beta$ . Kun fotoner der bliver projiceret ned på de horisontale retninger får lov at passere igennem polarisatorerne.

## Lokalrealisme og skjulte variable

Under udviklingen af kvantemekanikken i første halvdel af 1900-tallet, var der blandt tidens toneangivende forskere stor uenighed om, hvorvidt superpositionstilstande og entanglement kunne accepteres som reelle naturvidenskabelige fænomener eller om de var et udtryk for at den ny kvanteteori var ukomplet og/eller inkonsistent. Denne uenighed ses blandt andet tydeligt i den kendte *Bohr-Einstein dialog* imellem Niels Bohr og Albert Einstein. På den ene side stod den unge ophavsmand til kvanteteorien, Niels Bohr, der var fast overbevist om teoriens korrekthed og som med sin *københavnfortolkning* accepterede at naturen dybest set er *probabilistisk* (baseret på sandsynligheder) – at den kvantemekaniske tilstandsvektor kun forudsiger sandsynligheder for forskellige udfald er ikke et udtryk for manglende viden om det fysiske system men derimod er den komplette beskrivelse af det pågældende system. På den anden side stod den anerkendte og verdensberømte Albert Einstein, som repræsenterede det gældende naturvidenskabelige paradigme og den klassiske fysiks krav til hvilke grundlæggende principper der skal være opfyldt af enhver komplet fysisk teori, herunder kravene om *lokalitet* og *realisme*. En teori der opfylder begge principper siges at være lokalrealistisk.

*Lokalitet* – *Resultaterne af målinger på et fysisk system skal være uafhængige af de resultater, der opnås ved målinger på et andet fysisk system, der er rumligt adskilt fra det første og kun har vekselvirket med dette i en fjern fortid.* Det betyder, at fysiske objekter skal være tæt på hinanden eller skal kunne sende information til hinanden for at kunne vekselvirke – der skal være kausalitet (en årsag virkningssammenhæng). Den klassiske fysiks feltteorier (eks. elektromagnetisme og gravitation) er altså ikke i strid med lokalitetsprincippet, selvom adskilte objekter kan påvirke hinanden over store afstande, da vekselvirkningen sker via et medierende felt (hhv. de elektromagnetiske felter og gravitationsfeltet).

*Realisme* – *Naturen eksisterer uafhængig af om den bliver observeret eller ej. Alternativt, resultatet af en måling repræsenterer en forudeksisterende egenskab ved det fysiske system og ikke en egenskab der er frembragt af målingen.*

Et af de mest kendte bidrag til Bohr-Einstein dialogen er et arbejde som Einstein publicerede sammen med Boris Podolsky og Nathan Rosen i 1935, kendt som *EPR artiklen* [2]. I artiklen med titlen *“Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?”* argumenterede forfatterne for, at kvantemekanikken var i strid med princippet om lokalrealisme og derfor ikke kunne betragtes som en komplet fysisk teori. For at genetablere lokalrealisme i kvantemekanikken foreslog de, at det måtte eksistere såkaldte “skjulte variable” (hidden variables) som ikke er tilgængelige for fysiske eksperimenter,

men som genintroducerer kausalitet og forklarer kvantemekanikkens tilsyneladende probabilistiske struktur. Teorier baseret på skjulte variable kaldes i den videnskabelige litteratur for *local hidden variable theories*.

## Bells ulighed

I 1964 udledte den irske fysiker John S. Bell et teoretisk resultat [1], der gør det muligt at teste enhver lokal skjult variabel teori imod kvantemekanikkens forudsigelser. Resultatet, *Bells ulighed*, findes i mange alternative formuleringer. Her fokuserer vi på den variant af Bells ulighed der er kendt som CHSH uligheden [3] (Clauser-Horne-Shimony-Holt) givet ved

$$|S| \leq 2, \quad (63)$$

hvor

$$S(\alpha, \alpha', \beta, \beta') = E_{HV}(\alpha, \beta) - E_{HV}(\alpha, \beta') + E_{HV}(\alpha', \beta) + E_{HV}(\alpha', \beta') \quad (64)$$

er et mål for korrelationerne imellem to partikler når lokalrealisme antages. Uligheden udtrykker således en øvre grænse for styrken af korrelationerne i en hvilken som helst teori baseret på lokalrealisme, og dette kan så sammenholdes med den tilsvarende kvantemekaniske forudsigelse ved at konstruere  $S$ -parameteren ud fra (49) og de kvantemekaniske koincidenssandsynligheder beregnet som i (50).

For at se, hvordan Bells ulighed udledes, starter vi med at antage lokalitet, og dermed at der findes skjulte variable som vi betegner med  $\lambda$ . John Bell skriver i sin oprindelige artikel: *“It is a matter of indifference in the following whether  $\lambda$  denotes a single variable or a set, or even a set of functions, and whether the variables are discrete or continuous”* [1]. Men de skjulte variables rolle er at bestemme korrelationerne imellem f.eks to fotoner i det øjeblik de dannes. Resultaterne af efterfølgende målinger på de to fotoner vil således være fuldstændig bestemt af den skjulte variabel og de eksperimentelle indstillinger. Hvis målingerne gentages mange gange med fotonpar frembragt i identiske tilstande, så vil  $\lambda$  variere fra gang til gang, men resultaterne er for hver gentagelse entydigt bestemt af  $\lambda$ ,  $\alpha$  og  $\beta$ :

$$A = A(\alpha, \lambda) = \pm 1 \quad (65)$$

$$B = B(\beta, \lambda) = \pm 1 \quad (66)$$

Essentielt for lokalitetsprincippet er, at resultatet  $B$  ikke afhænger af målingen  $A$  i den anden mode og indstillingen  $\alpha$  for denne måling, og omvendt. Vi antager desuden, at fordelingen af værdierne af  $\lambda$  over mange eksperimentelle gentagelser er beskrevet med en sandsynlighedsfordeling  $p(\lambda) \geq 0$  således at

$$\int p(\lambda) d\lambda = 1. \quad (67)$$

Ved hjælp af denne sandsynlighedsfordeling kan vi beregne den korrelation mellem målingerne den skjulte variabel teori forudsiger:

$$E_{HV}(\alpha, \beta) = \int A(\alpha, \lambda)B(\beta, \lambda)p(\lambda)d\lambda. \quad (68)$$

Vi forestiller os nu, at der foretages målinger på de to fotoner i to forskellige polarisationsbaser i hver mode, dvs.:

$$\begin{aligned} A &= A(\alpha, \lambda) = \pm 1, \\ A' &= A(\alpha', \lambda) = \pm 1, \\ B &= B(\beta, \lambda) = \pm 1, \\ B' &= B(\beta', \lambda) = \pm 1. \end{aligned} \quad (69)$$

Vi kan nu udnytte flg. generelle matematiske resultater: (I) Hvis to størrelser  $B$  og  $B'$  hver kan antage værdierne  $\pm 1$ , så gælder ét af følgende to tilfælde

$$B + B' = 0 \wedge B - B' = \pm 2 \quad (70)$$

$$B - B' = 0 \wedge B + B' = \pm 2. \quad (71)$$

(II) Hvis  $A$ ,  $A'$ ,  $B$  og  $B'$  alle er begrænset til at antage værdierne  $\pm 1$ , så er

$$s = A(B - B') + A'(B + B') \quad (72)$$

$$= AB - AB' + A'B + A'B' \quad (73)$$

$$= \pm 2. \quad (74)$$

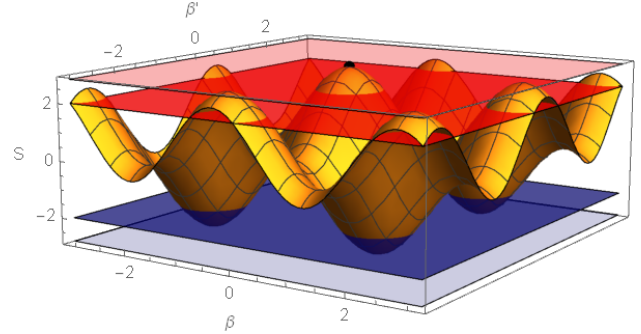
Indsætter vi nu udtrykkene fra (69), ganger på begge sider af ligningen med sandsynlighedsfordelingen  $p(\lambda)$  og integrerer over alle  $\lambda$ -værdier fås:

$$\begin{aligned} S(\alpha, \alpha', \beta, \beta') &= \int s p(\lambda) d\lambda \\ &= \langle A(\alpha, \lambda)B(\beta, \lambda) - A(\alpha, \lambda)B'(\beta', \lambda) \\ &\quad + A'(\alpha', \lambda)B(\beta, \lambda) + A'(\alpha', \lambda)B'(\beta', \lambda) \rangle \\ &= E_{HV}(\alpha, \beta) - E_{HV}(\alpha, \beta') \\ &\quad + E_{HV}(\alpha', \beta) + E_{HV}(\alpha', \beta') \end{aligned} \quad (75)$$

Da  $s = \pm 2$  er middelværdien  $S$  begrænset til  $-2 \leq S \leq 2$ , dvs.  $|S| \leq 2$ , hvilket netop er Bells ulighed. Her har vi i (75) udnyttet at middelværdien er en lineær operation, dvs.  $\langle X + Y \rangle = \langle X \rangle + \langle Y \rangle$ . Vi har desuden brugt antagelsen om realitet idet udregningen af middelværdierne i (75) forudsætter, at  $A$  og  $B$  er veldefinerede og for hver realisering af eksperimentet har værdier der er bestemt af  $\lambda$  og hhv.  $\alpha$  og  $\beta$  forud for målingen.

Modsat korrelationsfunktionerne  $E$  har  $S$  parameteren ikke nogen klar fysisk fortolkning. For at få en bedre

forståelse af  $S$  kan vi derfor prøve at visualisere den. Vha. sandsynlighederne (53)-(56) og (49) kan vi finde de kvantemekaniske korrelationsfunktioner, og dem kan vi efterfølgende indsætte i udtrykket for  $S$  (75). Hvis vi ydermere antager, at de vinkler der måles ved for den ene



Figur 2. Visualisering af  $S(\alpha, \alpha', \beta, \beta')$  for  $\alpha = -\pi/4$  og  $\alpha' = 0$  (gul flade). De mørke planer angiver de øvre (rød) og nedre (blå) grænser  $S = \pm 2$  for teorien baseret på skjulte variabel og lokalrealisme. De halvgennemtsigtige planer angiver de øvre (rød) og nedre (blå) grænser  $S = \pm 2\sqrt{2}$  som forudsiges af kvantemekanikken. Af figuren fremgår det, at for de givne valg af  $\alpha$  og  $\alpha'$  antager  $S$  for nogle særlige punkter i parameter rummet, bla.  $\beta = -\pi/8$  ( $-22.5^\circ$  eller  $157.5^\circ$ ) og  $\beta' = \pi/8$ , som netop er de værdier der benyttes i eksperimenterne i QuantumLab.

foton er  $\alpha = -\pi/4$  ( $-45^\circ$ ) og  $\alpha' = 0$  ( $0^\circ$ ), kan vi plotte  $S$  som funktion af  $\beta$  og  $\beta'$ . Resultatet er vist i figur 2. Af figuren fremgår det tydeligt, at kvantemekanikkens forudsigelser af værdien for  $S$  i særlige parameter regioner overstiger grænserne på  $S = \pm 2$ , dikteret af teorier baseret på skjulte variable og lokalrealisme.  $S$ -værdier der ligger inden for disse regioner kan altså *ikke* beskrives ved en klassisk variant af kvantemekanikken.

\* E-mail: ulrich.hoff@fysik.dtu.dk

- [1] J S Bell, "On the Einstein Podolsky Rosen Paradox", *Physics* **1**, 195–200, (1964).
- [2] A Einstein, B Podolsky, and N Rosen, "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?", *Phys. Rev.* **47**, 777–780, (1935).
- [3] J F Clauser, M A Horne, A Shimony, and R A Holt, "Proposed experiment to test local hidden-variable theories", *Phys. Rev. Lett.* **23**, 880–884 (1969).